2021-2022 ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

1.$(X, \|.\|)$bir normlu vektör uzayı olsun.

(a)$B = \{x \in X: \ \|x\| < 1\}$ yuvarının açık küme olduğunu gösteriniz.

(b)$\overline{B} = \{x \in X: \ \|x\| \leq 1\}$yuvarının kapalı küme olduğunu gösteriniz.

2. $(X, \|.\|)$bir normlu vektör uzayı, (x_n) ve (y_n) bu uzayda iki Cauchy dizisi olsun. Her $n \in IN$ için $\alpha_n = \|x_n - y_n\|$olmak üzere (α_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

3. l_∞ tüm sınırlı reel dizilerin $x = (x_n)$ olmak üzere $\|x\|_\infty = sup\{|x_n|: \ n = 1,2, \ldots\}$normu ile donatılmışvekrör uzayı olsun. Sıfıra yakınsayan tüm reel dizilerden oluşan $c_0 \subset l_\infty$altuzayının kapalı olduğunu gösteriniz.

4. IR^n vektör uzayı $\|.\|$ Öklid normu ile donatılmış olsun.$(IR^n, \|.\|)$normlu vektör uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösteriniz.

5. Her $n \in IN$ için $a_n = \frac{x^n}{2^n}$olmak üzere $a = (a_n)$ dizisi verilmiş olsun.

(a)a dizisinin hangi $x \in IR$ için$(l_1, \|.\|_1)$uzayına ait olduğunu belirleyiniz.

(b) $\|a\|_1$ değerini bulunuz.

UYARI: Süre 100 Dakikadır… **07.07.2022**

Prof.Dr.Cenap DUYAR

ÇÖZÜMLER

1- (a) $\forall x \in B \Rightarrow \|x\| < 1 \Rightarrow \varepsilon = 1 - \|x\| > 0 \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset B$; çünkü

$\forall y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y-x\| + \|x\| < \varepsilon + \|x\| = 1$.

$\forall x \in B$ noktası B için bir 'iç nokta'dır; dolayısıyla B açık.

(b) $\forall x \in X \setminus \overline{B} \Rightarrow \|x\| > 1 \Rightarrow \varepsilon = \|x\| - 1 > 0 \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{B}$; çünkü

$\forall y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\Rightarrow \|y\| \geq \|x\| - \|x-y\| > \|x\| - \varepsilon = \|x\| - (\|x\|-1) = 1$.

Böylece $\forall x \in X \setminus \overline{B}$ noktası $X \setminus \overline{B}$ için bir iç 'nokta'dır, dolayısıyla $X \setminus \overline{B}$ açık, o halde $\overline{B}$ kapalı.

2- (x_n) ve (y_n) ler $(X, \|\cdot\|)$ uzayında Cauchy dizisi $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m > N$, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2 \wedge \|y_n - y_m\| < \varepsilon/2 \Rightarrow \forall n,m > N$,

$$|\alpha_n - \alpha_m| = \left| \|x_n - y_n\| - \|x_m - y_m\| \right|$$
$$= \left| \|x_n - y_n\| - \|y_n - x_m\| + \|y_n - x_m\| - \|x_m - y_m\| \right|$$
$$\leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (\alpha_n)$ bir reel Cauchy dizisidir, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ Banach uzayı olduğundan yakınsaktır.

3. NOTLARDA VAR!

4. NOTLARDA VAR!

5. (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{x^n}{2^n}$ olmak üzere $a = (a_n)$ dizisi $|x| < 2$ koşulunu sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerleri için $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ uzayına aittir, çünkü

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \text{ kuvvet serisi } \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(2^{n+1})}{|x|^n/(2^n)}$$
$$= \frac{|x|}{2} < 1, \text{ yani } |x| < 2 \text{ ise yakınsaktır.}$$

(b) $$\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x|}{2}}$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{|x|}{2}} = \frac{2}{2 - |x|}.$$